BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2006

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Г.Ф.КУЛИЕВ, А.А.МЕХТИЕВ
Бакинский Государственный Университет

Известно, что одним из важных методов решения проблем оптимального управления линейными системами является метод L - проблемы моментов. Решение L - проблемы моментов полностью отвечает на вопрос об управляемости системы. В данной работе, применяя метод L - проблемы моментов, решается задача оптимального быстродействия для уравнения колебаний стержня и находится оптимальное управление в явном виде в форме ряда.

Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления процессом, который описывается уравнением колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=v(x,t),(x,t)\in Q=\{0<x<l;0<t<T\}, \quad (1)$$

с граничными

$$u(0,t)=u(l,t)=0, u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, t\in(0,T), \quad (2)$$

и начальными

$$u(x,0)=\varphi_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x), x\in(0,l), \quad (3)$$

условиями, где $u(x,t)$-функция, характеризирующая состояние системы, $v(x,t)$ -управление. За класс допустимых управлений берем $L_2(Q)$. Предположим, что $\varphi_0\in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \varphi_1\in L_2(0,l)$. При этих условиях для каждого фиксированного допустимого управления $v(x,t)\in L_2(Q)$ задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение $u(x,t)$ из $C(0,T;W^1,W^0)$, где $W^0=L_2(0,l)$,

$W^1=\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)=\{\varphi\in W_2^2(0,l);\varphi^{(i)}(x)\big|_{x=0,l}=0, i=0,1\}$(см.[1]). Отсюда следует, что $u\in C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right), \frac{\partial u}{\partial t}\in C(0,T;L_2(0,l))$.

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается такая функция $u(x,t)$ из $C(0,T;W^1,W^0)$, что для любой функции $\psi(x,t)\in L_2(0,T;W^1,W^0)$ выполняется следующее интегральное тождество

$$\int_0^l \varphi_1(x)\psi(x,0)dx+\iint_Q\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]dxdt-\int_0^l \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}\psi(x,T)dx$$
$$=-\iint_Q v(x,t)\psi(x,t)dxdt,$$

причем удовлетворение первого условия из (3) понимается в смысле равенства следа.

Это решение, с помощью метода Фурье, можно представить в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{0n}\cos\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\varphi_{1n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t)Y_n(x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t\left(\int_0^l v(\xi,\tau)Y_n(\xi)d\xi\right)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)d\tau Y_n(x), \qquad (4)$$

где $\lambda_n, Y_n(x)$ - соответственно собственные значения и ортонормированные собственные функции следующей спектральной задачи:

$$Y^{(4)}(x)+\lambda Y(x)=0,\ \ Y(0)=Y(l)=0,\ \ Y'(0)=Y'(l)=0, \qquad (5)$$

а φ_{0n} и φ_{1n} - коэффициенты Фурье соответственно функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Ставится следующая задача оптимального управления: найти такое допустимое управление $v(t)$ из шара $\|v\|_{L_2(Q)}\le L$, где $L>0$ - заданное число, которое переводит систему (1),(2) из заданного начального состояния (3) в конечное нулевое состояние за наименьшее время T (см.[2],[3]), т.е. за минимальное время удовлетворяются условия

$$u(x,T)=0, \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0\,. \qquad (6)$$

Введем обозначения:

$$\alpha_{1n}(t)=-(\varphi_{0n}\cos\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\varphi_{1n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t),$$
$$\alpha_{2n}(t)=(\sqrt{\lambda_n}\varphi_{0n}\sin\sqrt{\lambda_n}t-\varphi_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t),\quad n=1,2,\dots .$$

Тогда конечные условия (6), согласно (4), представятся в виде:

$$\alpha_i(x,T)=\int_0^T\int_0^l v(\xi,T)K_i(\xi,\tau,x,T)d\xi d\tau \ \ (i=1{,}2),$$

где

$$\alpha_i(x,T)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}(T)Y_k(x) \ (i=1{,}2), \qquad (7)$$

$$K_1(\xi,\tau,x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)Y_n(x)Y_n(\xi), \qquad (8)$$

$$K_2(\xi,\tau,x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)Y_n(x)Y_n(\xi)\,. \qquad (9)$$

Для решения поставленной задачи оптимального быстродействия пользуемся результатами, полученными в параграфе 2 главы IX из [2]; известно, что оптимальное управление записывается в виде

$$v(\xi,\tau)=\|v\|^2\int_0^l\sum_{i=1}^{2}\varphi_i(x)K_i(\xi,\tau,x,T)dx, \qquad (10)$$

а наименьший положительный корень T уравнения

$$\int_0^l\int_0^T\left[\int_0^l\sum_{i=1}^{2}\ {}_i(x)K_i(\xi\xi,\tau,x,Tdx)\right]^2 d\xi d\tau=\frac{1}{\|v\|^2}=\frac{1}{L^2} \qquad (11)$$

дает время быстродействия, причем неизвестные функции $\varphi_i(x)$ $(i=1{,}2)$ определяются из системы уравнений:

$$\|v\|^2\int_0^l\sum_{i=1}^{2}\varphi_i(x)\int_0^l\int_0^T K_i(\xi,\tau,x,T)K_p(\xi,\tau,y,T)d\xi d\tau dx=\alpha_p(y,T) \ (p=1{,}2). \qquad (12)$$

Введем функции

$$\psi_i(x)=\|v\|^2\varphi_i(x) \ \ (i=1{,}2) \qquad (13)$$

и подставим их в выражения (10)-(12). Функции $\psi_i(x)$ $(i=1{,}2)$ будем искать в виде ряда Фурье:

$$\psi_k(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_{ki}Y_i(x) \ (k=1{,}2), \qquad (14)$$

где

$$\psi_{ki}=\int_0^l\psi_k(x)Y_i(x)dx \ \ (i=1{,}2{,}\ldots;\kappa=1{,}2)\,.$$

Используя формулы (7)-(9) и (13), систему (12) представим в виде

$$\int_0^l \psi_1(x)\int_0^l\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sin\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)Y_i(\xi)Y_i(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)Y_k(\xi)Y_k(y)\right]d\xi d\tau dx+$$

$$+\int_0^l \psi_2(x)\int_0^l\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)Y_i(\xi)Y_i(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)Y_k(\xi)Y_k(y)\right]d\xi d\tau dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{1k}(T)Y_k(y)\,, \qquad (15)$$

$$\int_0^l \psi_1(x)\int_0^l\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sin\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)Y_i(\xi)Y_i(x)\sum_{k=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)Y_k(\xi)Y_k(y)\right]d\xi d\tau dx+$$

$$+\int_0^l \psi_2(x)\int_0^l\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_i}(T-\tau)Y_i(\xi)Y_i(x)\sum_{k=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau)Y_k(\xi)Y_k(y)\right]d\xi d\tau dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k}(T)Y_k(y)\,. \qquad (16)$$

Правые части (15) и (16) сходятся в пространстве $L_2(0,l)$. Пользуясь соотношением (14) и ортонормированностью функций $Y_n(x)$ в $L_2(0,l)$, получаем следующую систему для нахождения ψ_{1i} и ψ_{2i} $(i=1,2,...)$:

$$\begin{cases}\psi_{1i}\left(\frac{1}{2}T-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)+\psi_{2i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right)=\lambda_i\alpha_{1i}(T),\\ \psi_{1i}\left(\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right)+\psi_{2i}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}T+\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)=\sqrt{\lambda_i}\alpha_{2i}(T).\end{cases} \qquad (17)$$

Основной определитель этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}T-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\\ \frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T & \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}T+\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}T^2+\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T-\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}\,,$$

а вспомогательные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\lambda_i\alpha_{1i}(T) & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\\ \sqrt{\lambda_i}\alpha_{2i}(T) & \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}T+\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\end{vmatrix}=\lambda_i\alpha_{1i}(T)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}+\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)-$$

$$-\sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{2i}(T)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}T-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T & \lambda_i\alpha_{1i}(T)\\ \frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T & \sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{2i}(T)\end{vmatrix}=\alpha_{2i}(T)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}T-\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)-$$

$$-\sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{1i}(T)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right).$$

Тогда ясно, что

$$\psi_{1i}=\frac{\lambda_i\alpha_{1i}(T)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}T+\frac{1}{4}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)-\sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{2i}(T)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}T^2+\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T-\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}},$$

$$\psi_{2i}=\frac{\sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{2i}(T)\left(\frac{1}{2}T-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)-\sqrt{\lambda_i}\,\alpha_{1i}(T)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}T^2+\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T-\frac{1}{8\sqrt{\lambda_i}}},\ (i=1,2\ldots). \qquad (18)$$

Подставляя найденные значения ψ_{1i}, ψ_{2i} в (14) и учитывая (13) получим оптимальное управление:

$$v(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^l \psi_{ki}Y_i(x)K_k(\xi,\tau,x,T)dx.$$

А наименьший положительный корень T уравнения

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\psi_{1i}^2\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{2}T-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right)+2\psi_{1i}\psi_{2i}\left(\frac{1}{4\lambda_i}-\frac{1}{4\lambda_i}\cos 2\sqrt{\lambda_i}T\right)+\right.$$

$$\left.+\psi_{2i}^2\ \frac{1}{2}T+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T\right]=L^2 \qquad (19)$$

дает время оптимального быстродействия. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть выполняются условия

$\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \varphi_1 \in L_2(0,l), v \in L_2(Q)$. Тогда решение задачи оптимального быстродействия представляется в виде

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^l \psi_{ji} Y_i(x) K_j(x,t,\xi,T)\,d\xi,$$

где ψ_{ji} определяются формулами (18), а наименьший положительный корень уравнения (19) дает время оптимального быстродействия.

Для нахождения наименьшего положительного корня T уравнения (19) можно предложить следующий алгоритм (см.[2]).
Запишем систему

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x) \int_0^l\int_0^T K_i(\xi,\tau,x,T) K_j(\xi,\tau,y,T)\,d\xi d\tau dx = \alpha_j(y), j = 1,2, \tag{20}$$

$$v(\xi,\tau) = \int_0^l \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x) K_i(\xi,\tau,x,T)\,dx, \tag{21}$$

$$\|v\| = \left(\int_0^l\int_0^T v^2(x,t)\,dxdt\right)^{1/2} = \frac{1}{F(\varphi)} \le L, \tag{22}$$

где

$$F(\varphi) = \left\{\int_0^l\int_0^T \left[\int_0^l \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(x) K_i(\xi,t,x,T)\,dx\right]^2 d\xi dt\right\}^{1/2}.$$

Задаемся первым приближением $T = T_1$. Решая систему (20), находим $\psi_i(x)$ $(i = 1,2)$. Вычисляем $\|v\|$, проверяем неравенство $\|v\| \le L$. Если $\|v\| < L$, то в следующем приближении берем $T_2 = T_1 - \Delta T_1$, где $\Delta T_1 > 0$. При $\|v\| > L$ полагаем $T_2 = T_1 + \Delta T_1$, где $\Delta T_1 > 0$. Процесс повторяется до тех пор, пока не найдем такое наименьшее время T_0, при котором условие $F(\varphi) = \dfrac{1}{L}$ выполняется, а при $T = T_0 + \Delta T$, где ΔT - бесконечна малая положительная величина, нарушается, т.е. $\|v\| > L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.,Изд.МГУ,1989.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М., Наука,1977.

3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., Наука,1965.

ÇUBUĞUN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL ƏN TEZ TƏSİR MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, A.Ə.MEHDİYEV

XÜLASƏ

Məlumdur ki, xətti sistemlərin optimal idarə məsələlərinin mühüm həll üsullarından biri L- momentidir. L- moment probleminin həlli sisteminin idarə olunması sualına tam cavab verir. Bu işdə L- moment problemi üsulunu tətbiq edərək, çubuğun rəqsləri tənliyi üçün optimal ən tez təsir məsələsi həll edilir və sıra şəklində optimal idarənin aşkar ifadəsi tapılır.

THE OPTIMAL QUICKACTION PROBLEM FOR THE BAR VIBRATION EQUITION

Q.F.GULIYEV, A.A.MEHDIYEV

SUMMARY

It is known that one of the important methods for solution of the optimal control problems for the linear systems is the L -moments method. Solution of the L -moments problem solves the problem of controlibility of the system. In present work the optimal quickaction problem is solved by the help of L -moments method for the bar vibration equation and the optimal control is found in the form of series.